Bài 4:

Nhận xét:

* Một đồ thị có chu trình độ dài lẻ thì ít nhất có một đỉnh có bậc lẻ.
* Một đồ thị có hai mầu thì mọi đỉnh đều có bậc chẵn.

Chứng minh:

\*Định lý: Một đồ thị là đồ thị hai mầu khi và chỉ khi nó không chứa chu trình độ dài lẻ.

\*Chứng minh theo hướng đi từ trái sang phải:

* Nếu đồ thị không chứa chu trình độ dài lẻ, thì mọi đỉnh đều có bậc chẵn.

Giả sử ngược lại, có một đỉnh có bậc lẻ. Khi đó, đỉnh này phải cùng mầu với một trong các đỉnh kề nó, tạo thành một chu trình độ dài lẻ. Điều này mâu thuẫn với giả thiết.

* Vì mọi đỉnh đều có bậc chẵn, nên có thể tô mỗi đỉnh một trong hai mầu sao cho không có cạnh nào nối giữa hai đỉnh cùng mầu.

Điều này là do nếu tô hai đỉnh cùng mầu, thì sẽ tạo thành một cạnh nối giữa hai đỉnh đó, vi phạm giả thiết.

\*\*Chứng minh theo hướng đi từ phải sang trái:

* Nếu đồ thị có hai mầu, thì mọi đỉnh đều có bậc chẵn.

Điều này là do nếu có một đỉnh có bậc lẻ, thì đỉnh này phải cùng mầu với một trong các đỉnh kề nó, tạo thành một cạnh nối giữa hai đỉnh đó, vi phạm giả thiết.

* Vì mọi đỉnh đều có bậc chẵn, nên không có chu trình độ dài lẻ.

Giả sử ngược lại, có một chu trình độ dài lẻ. Khi đó, chu trình này phải chứa ít nhất một đỉnh có bậc lẻ. Điều này mâu thuẫn với giả thiết.

Kết luận: Một đồ thị là đồ thị hai mầu khi và chỉ khi nó không chứa chu trình độ dài lẻ.